

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

---

MATHÉMATIQUES

Série : ES

---

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures. – COEFFICIENT : 7

---

*Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8, dont une page en annexe à rendre avec la copie.*

*Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.*

*L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.*

*Le candidat doit traiter tous les exercices. Il est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

### Exercice 1 (4 points)

#### Commun à tous les candidats

Soit  $f$  une fonction définie sur l'ensemble  $] - \infty ; 1[ \cup ]1 ; + \infty[$ .

On note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormal.

On suppose que  $f$  est dérivable sur chacun des intervalles  $] - \infty ; 1[$  et  $]1 ; + \infty[$  et on note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

Soit  $F$  une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]1 ; 6]$ .

On suppose que  $f$  admet le tableau de variation ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$1$	$6$	$+\infty$
$f$	$2$	$+\infty$	$3$	$+\infty$

Pour chacune des huit affirmations ci-dessous, une seule de ces trois propositions convient :

VRAIE ou FAUSSE ou LES INFORMATIONS DONNÉES NE PERMETTENT PAS DE CONCLURE.

Recopier sur la copie le numéro de la question et la proposition choisie.

Aucune justification n'est demandée.

*Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni ne retire aucun point.*

1. L'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur  $] - \infty ; 1[ \cup ]1 ; + \infty[$ .
2. La droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe  $(C_f)$ .
3. Pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1 ; + \infty[$ ,  $f'(x) \geq 0$ .
4. La fonction  $F$  est décroissante sur l'intervalle  $]1 ; 6]$ .
5.  $\ln[f(x)]$  existe pour tout  $x$  appartenant à  $] - \infty ; 0[$ .
6. Soit  $g$  la fonction définie sur  $] - \infty ; 1[ \cup ]1 ; + \infty[$  par  $g(x) = e^{f(x)}$ .
  - a.  $g(6) = e^3$ .
  - b.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g(x) = +\infty$
  - c.  $g'(3) \geq 0$ .

## Exercice 2 (5 points)

### Commun à tous les candidats

L'objet de l'exercice consiste à étudier les évolutions du nombre de mariages et du nombre de pacs (pacte civil de solidarité) signés entre partenaires de sexe opposé en France à partir de l'année 2000.

#### Partie A : étude du nombre de mariages

Le tableau suivant donne le nombre de mariages en France, en milliers, de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de mariages $y_i$ en milliers	305	296	286	283	278	283	274	274	265

Source : INSEE

Pour  $i$  entier variant entre 0 et 8, on a représenté en **Annexe 1** dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$  associé à cette série.

- Écrire une équation de la droite d'ajustement affine  $D$  de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).
  - Représenter  $D$  dans le repère de l'**Annexe 1**.
- En utilisant cet ajustement affine, déterminer par la méthode de votre choix une estimation du nombre de mariages en France en 2012 (le résultat sera arrondi au millier).

#### Partie B : étude du nombre de pacs

Le tableau suivant donne le nombre de pacs signés entre partenaires de sexe opposé en France, en milliers, de 2000 à 2008.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de pacs $Y_i$	16	15	21	26	33	53	64	96	138

Source : INSEE

- Représenter dans le repère de l'**Annexe 1** le nuage points  $N_i(x_i; Y_i)$  associé à cette nouvelle série statistique.

L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. Pour  $i$  entier variant entre 0 et 8 on pose  $Z_i = \ln Y_i$ .

- Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant où  $Z_i$  est arrondi au centième :

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Z_i$	2,77								

3. Une équation de la droite d'ajustement affine de  $Z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés est  $Z = 0,29x + 2,51$  (les coefficients étant arrondis au centième).
- En utilisant la relation  $Z = \ln Y$ , justifier la relation :  $Y = 12,30 e^{0,29x}$
  - En utilisant cet ajustement, donner une estimation du nombre de pacs signés en France entre personnes de sexe opposé en 2012 (arrondir au millier).

### Partie C : Comparaison

*Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

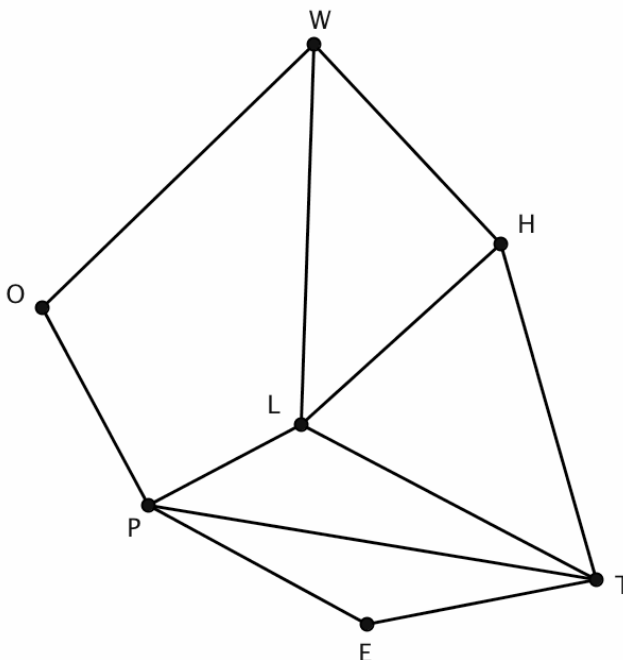
Si les évolutions du nombre de mariages et du nombre de pacs signés entre personnes de sexe opposé en France se poursuivent selon les modèles décrits dans les parties A et B, estimer à partir de quelle année le nombre de pacs dépassera celui des mariages.

### Exercice 3 (5 points)

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On considère le graphe  $\Gamma$  ci-dessous :



#### Partie A : Étude d'un graphe

1. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner une telle chaîne.
2. Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? (La réponse devra être justifiée). Si oui donner un tel cycle.
3. Donner la matrice  $M$  associée au graphe  $\Gamma$  (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique : E ; H ; L ; O ; P ; T ; W).

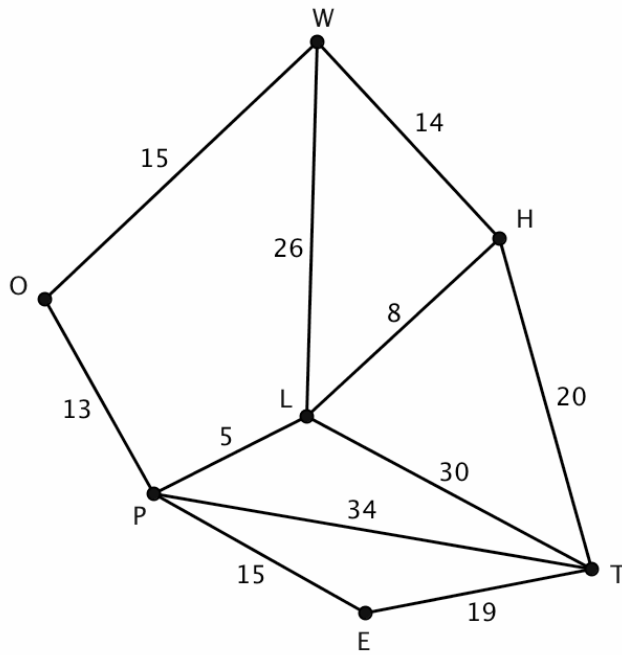
#### Partie B : Voyage scolaire

La classe de Terminale d'Arthur est en voyage scolaire en Angleterre.

Les professeurs organisateurs de ce voyage décident de visiter plusieurs sites de Londres.

Les sites retenus dans Londres sont les suivants : Warren Street, Oxford Circus, Piccadilly Circus, Leicester Square, Holborn, Embankment et Temple. Ces lieux sont désignés respectivement par les lettres W, O, P, L, H, E et T et sont représentés dans le graphe  $\Gamma$  donné ci-dessus (chaque sommet représente un site à visiter et chaque arête une route reliant deux sites).

Les élèves sont laissés en autonomie deux heures pour faire du shopping et ramener des souvenirs à leurs familles. Le point de rendez-vous avec les organisateurs est fixé à Temple. Les temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été ajoutés sur le graphe.



Arthur, qui est à Oxford Circus, n'a pas vu le temps passer. Lorsqu'il s'en rend compte, il ne lui reste plus que 40 minutes pour arriver à Temple.

1. Déterminer le plus court chemin en minutes reliant Oxford Circus à Temple. Justifier la réponse à l'aide d'un algorithme.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin ? Arthur sera-t-il en retard ?

## Exercice n°4 (6 points)

### Commun à tous les candidats

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[11 ; +\infty[$  par

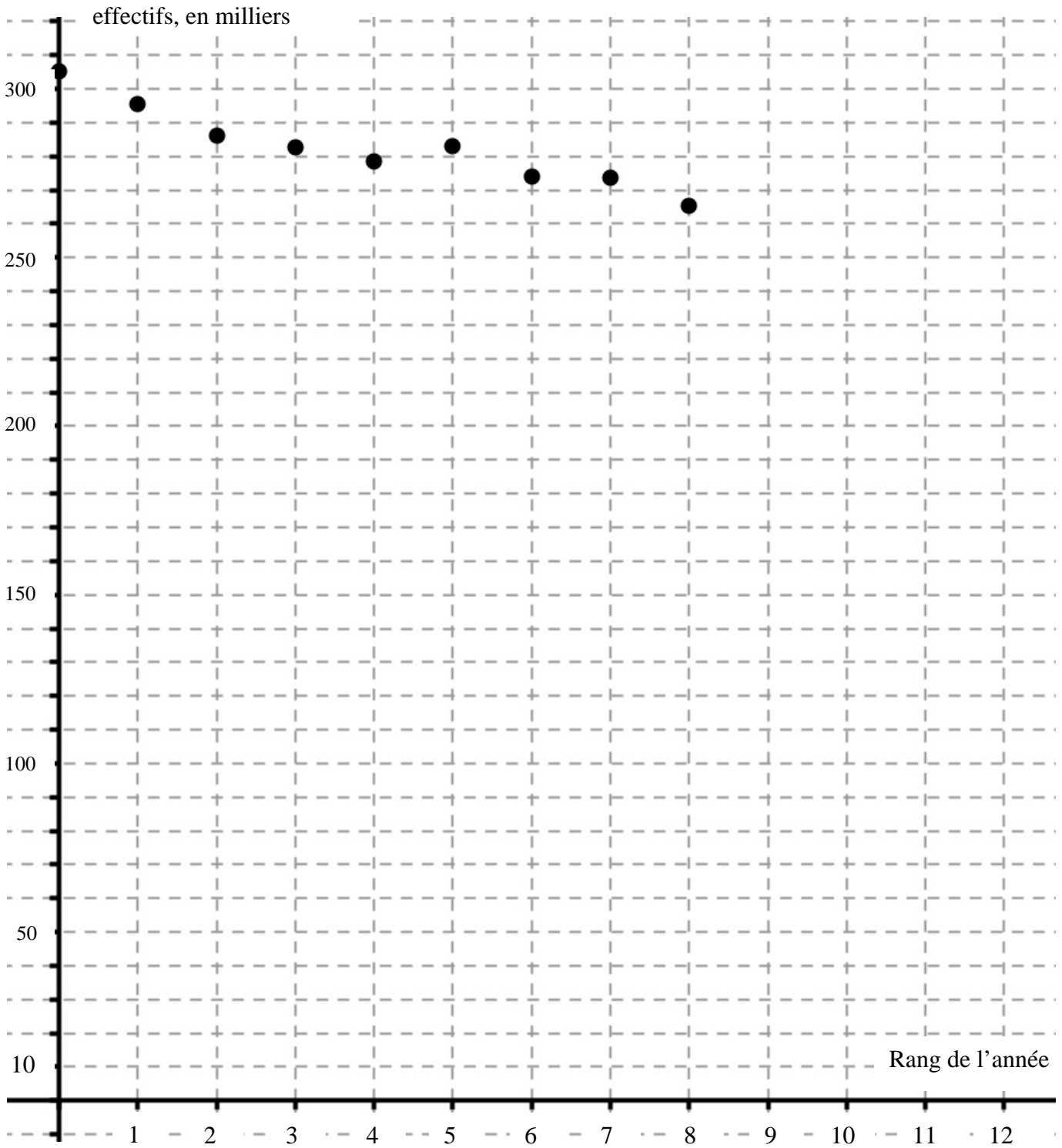
$$f(x) = 17\,280e^{-0,024x}$$

de sorte que  $f(x)$  représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte au cours de l'année  $2000 + x$ .

On admet que la fonction  $f$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $[11 ; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée sur cet intervalle.

1. Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2011 d'après ce modèle (on arrondira le résultat au billion près).
2. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
3. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[11 ; +\infty[$  puis dresser son tableau de variation.
4. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours d'une même année, 15 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?  
Si oui, déterminer, en justifiant, cette (ces) année(s).  
Si non, justifier la réponse.
5. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours de chaque année à partir de 2011, au moins 6 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?  
Si oui, justifier la réponse.  
Si non, déterminer, en justifiant, l'année pour laquelle les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6 000 billions de barils.
6.
  - a. Déterminer une primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[11 ; +\infty[$ .
  - b. Calculer la valeur exacte, puis donner la valeur arrondie à l'unité près, de l'intégrale  $I$  suivante :
$$I = \int_{11}^{21} f(x)dx.$$
  - c. En déduire le nombre moyen de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

**ANNEXE 1**  
**À rendre avec la copie**  
**EXERCICE 2 – commun à tous les candidats**



*Légende :*

- série du nombre de mariages en fonction du rang de l'année