B A C C A L A U R É A T T E C H N O L O G I Q U E

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

Génie Mécanique

Option A : Productique Mécanique
Option F : Microtechniques

Génie Énergétique

Génie Civil

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 4

Ce sujet comporte 5 pages.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n°99-186 du 16 novembre 1999.

Un formulaire de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.

Une feuille de papier millimétré sera mise à la disposition des candidats.

-*-*-

Il est rappelé aux candidats que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

LE CANDIDAT TRAITERA OBLIGATOIREMENT LES DEUX EXERCICES ET LE PROBLÈME

Exercice 1 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives :

$$a = 1 + \mathrm{i}\ ,\ b = a \times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\ \text{ et }\ c = -\sqrt{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}\ .$$

1. **a)** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes *a*, *b* et *c*.

b) Vérifier que $b = \left(1-\sqrt{3}\right) + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

c) En déduire que : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

d) Placer les points *A*, *B* et *C* dans le plan muni du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

2. **a)** Démontrer que le triangle *OAB* est un triangle rectangle.

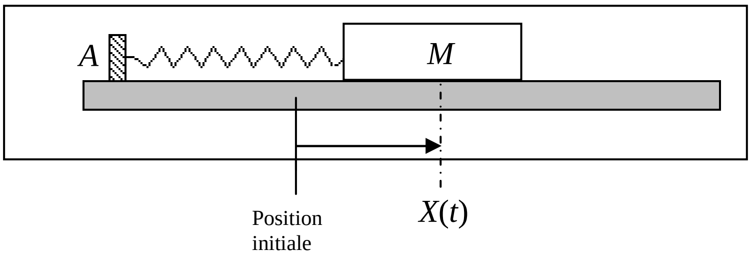
b) Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle *OAB* et construire ce cercle.

3. Déterminer la nature du quadrilatère *OABC* et prouver que le point *C* appartient au cercle circonscrit au triangle *OAB*.

Exercice 2 (4 points)

On fixe à l'extrémité d'un ressort horizontal un objet M, qui peut coulisser sans frottement sur un plan. Le point A, où est accrochée l'autre extrémité du ressort, est fixe.
Après avoir été écarté de sa position d'équilibre, l'objet est lâché avec une vitesse initiale.
On repère l'objet par son abscisse X qui est fonction du temps t et qui mesure l'écart entre la position à un instant t et sa position initiale.
On admet qu'à un instant t, la fonction X est solution de l'équation différentielle (E) :

$$X'' + 100X = 0.$$



1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'expression de la solution particulière X de (E) qui vérifie les conditions :

$$X(0) = 10^{-1} \text{ et } X'(0) = 1.$$

3. Montrer que pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a :

$$X(t) = 10^{-1}\sqrt{2}\cos\left(10t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Vérifier que l'énergie mécanique W du système, définie pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$W(t) = 10^{-1}[X'(t)]^2 + 10[X(t)]^2,$$

est constante.

5. Déterminer la valeur moyenne de la fonction X sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{10}\right]$.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction sur l'intervalle $[a;b]$ est donnée par :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Problème (11 points)

Sur la feuille **annexe**, on a représenté, dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'ensemble **R** des nombres réels.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0;1)$, $B(1;1)$ et $C(2;-1)$.

Partie A : détermination de la fonction *f*

1. Donner les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

2. On suppose que pour tout nombre réel *x*, $f(x)$ s'écrit : $f(x)=\left(ax+bx^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}+c$, où les lettres *a*, *b* et *c* désignent trois nombres réels.
En utilisant la question **1.**, déterminer la valeur des nombres *a*, *b* et *c*.

Partie B : étude de la fonction *f*

Dans toute la suite du problème, on admettra que : $f(x)=\left(x-x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}+1$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. **a)** Établir que pour tout nombre réel *x*, $f(x)=\mathrm{e}^2\left(x\mathrm{e}^{-x}-x^2\mathrm{e}^{-x}\right)+1$.
b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel *x* par :

$$f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}.$$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur **R**, puis établir le sens de variation de la fonction f sur **R**.

5. **a)** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y=1$.
b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

6. **a)** Montrer que sur l'intervalle $[-1;0]$, la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point. On notera α l'abscisse de ce point.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie C : calcul d'une aire

1. On considère la fonction *G* définie sur **R** par : $G(x)=\left(x^2+x+1\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}$. On note G' la fonction dérivée de la fonction *G* sur **R**.

Établir que pour tout nombre réel *x*, $G'(x)=\left(x-x^2\right)\mathrm{e}^{(-x+2)}$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.
Le résultat dont on donnera la valeur exacte, puis une valeur arrondie au dixième, sera exprimé en unité d'aire.

Annexe (problème)